Inversión y capital en economía cerrada:

- Economía cerrada y sin dinero.
- Ahora, agentes en la economía pueden transferir recursos a través del tiempo mediante la inversión en capital.
- Hasta ahora esto solamente se podía hacer mediante compra y venta de bonos.
- En economía con agente representativo, en equilibrio la cantidad de bonos que los agentes tenían era cero $\Rightarrow$ el equilibrio era sucesión de equilibrios estáticos con cero ahorro $\Leftrightarrow$ autarquía.
- Ahora, en equilibrio los agentes <u>sí</u> van a poder transferir recursos a través del tiempo mediante compra y venta de capital.

Capital en la función de producción:

- Capital generalmente se refiere a activos tangibles: edificios, máquinas, vehículos, etc. Pero también puede ser intangible: habilidades gerenciales, marca, etc.
- Denotamos capital como k_t.
- Función de producción:

$$y_t = A_t F(k_{t-1}, l_t)$$

Cantidad de capital disponible en t para producir es elegida en $t-1$.

k_{t-1}: capital instalado al final de $t-1$ disponible para producir en t.

A_t: productividad total de los factores.

- Cobb-Douglas: $y_t = A_t k_{t-1}^{\alpha} \ell_t^{1-\alpha}$

α: participación del capital en los costos de producción
elasticidad de la producción con respecto al capital.

$$MPL_t := \frac{\partial y_t}{\partial \ell_t} = (1-\alpha) A_t k_{t-1}^{\alpha} \ell_t^{-\alpha} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_{t-1}}{\ell_t}\right)^{\alpha} = (1-\alpha) \frac{y_t}{\ell_t}$$

MPL_t es decreciente en ℓ_t y creciente en k_{t-1}.
$\Rightarrow$ acumulación de capital va a tener efectos sobre los salarios de equilibrio.

$$MPK_t := \frac{\partial y_t}{\partial k_{t-1}} = \alpha A_t k_{t-1}^{\alpha-1} \ell_t^{1-\alpha} = \alpha A_t \left(\frac{\ell_t}{k_{t-1}}\right)^{1-\alpha} = \alpha \frac{y_t}{k_{t-1}}$$

MPK_t es decreciente en k_{t-1} y creciente en ℓ_t.

- Cada periodo la cantidad de capital se deprecia a una tasa $\delta \in (0,1)$. Generalmente $\delta \approx 0.05 - 0.08$

- Evolución del capital en el tiempo:

$$k_t = i_t + k_{t-1}(1-\delta)$$

$i_t :=$ inversión en t, inversión bruta en capital, formación bruta de capital.

$$k_t - k_{t-1} = i - \delta k_{t-1}$$ — inversión neta.

Equilibrio Competitivo:

Dos modelos: ① Empresas son dueñas del capital.

② Hogares son dueños del capital.

1. Firmas son dueñas del capital:

- Firmas son dueñas del capital ⇒ llevan a cabo inversión y son dueñas de los activos.
- Hogares son dueños de las empresas.
- Hogares ahorran solamente mediante compra/venta de bonos y de acciones.

Firmas:

$$d_t := A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} - w_t l_t - i_t$$

d_t: dividendos que la firma paga a sus accionistas en t.

En modelos anteriores donde las firmas no invertían, el pago a los accionistas era: $\pi_t = y_t - w_t l_t$

Firma puede sacrificar dividendos presentes para invertir y aumentar su capacidad productiva futura que le permitirá pagar más dividendos en el futuro.

Problema:

Firma maximiza el valor presente del pago de dividendos.

$$\max_{\{k_t, l_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} - w_t l_t - i_t}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{t-1})} \quad \text{s.a.}$$

$$k_t = i_t + (1-\delta) k_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\{k_t, l_t\}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} - w_t l_t - k_t + (1-\delta) k_{t-1}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

$$\text{CPO: } [l_t]: \frac{(1-\alpha) A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{-\alpha} - w_t}{\cancel{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}} = 0$$

$$[k_t]: \frac{\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta}{(1+r_1)\cdots(1+r_t)} - \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = 0$$

$$\ldots + \frac{A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} - w_t l_t - k_t + (1-\delta) k_{t-1}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + \frac{A_{t+1} k_t^{\alpha} l_{t+1}^{1-\alpha} - w_{t+1} l_{t+1} - k_{t+1} + \ldots}{(1+r_1)\cdots(1+r_t)}$$

$$\boxed{\underbrace{w_t}_{\text{cmg del } l_t} = \underbrace{(1-\alpha) A_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{-\alpha}}_{PML_t}}$$

$$\frac{\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta}{\cancel{(1+r_1)}\cdots\cancel{(1+r_{t-1})}(1+r_t)} = \frac{1}{\cancel{(1+r_1)}\cdots\cancel{(1+r_{t-1})}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1}_{\text{cmg.}} = \underbrace{\frac{\overbrace{\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha}}^{PMK_{t+1}} + 1 - \delta}{1+r_t}}_{\text{Beneficio marginal de invertir.}}$$

Si la firma renuncia a una unidad de dividendos hoy con el fin de invertir esa unidad, en t+1 va a producir una cantidad $\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha}$ adicional y puede vender $(1-\delta)$ de capital restante para pagar dividendos.

$$\cancel{1} + r_t = \alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha} + \cancel{1} - \delta$$

$\Rightarrow$ en eq: $\boxed{r_t + \delta = \alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha} = \alpha \frac{y_{t+1}}{k_t}}$

Condiciones de optimalidad:

$$\left.\begin{aligned} w_t &= (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_{t-1}}{l_t}\right)^{\alpha} \\ r_{t-1} + \delta &= \alpha A_t \left(\frac{l_t}{k_{t-1}}\right)^{1-\alpha} \end{aligned}\right\}$$

Dados w_t, r_t, de aquí deberíamos poder encontrar l_t, k_{t-1}

Dos ecuaciones en dos incógnitas pero al solucionar el sistema se me van a cancelar los términos

$\Rightarrow$ No se puede encontrar solución para l_t y k_{t-1}.

La razón: la función de producción tiene rendimientos constantes a escala y las dos ecuaciones NO son linealmente independientes.

Ratio óptimo: $\boxed{\frac{k_{t-1}}{l_t} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w_t}{r_t + \delta}}$

Consumidores:

$$\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left(\ln c_t + \gamma \ln (H_t - l_t) \right) \quad \text{s.a.}$$

$$c_t + b_t + \sum_{j=1}^{J} v_t^j \left(\theta_t^j - \theta_{t-1}^j \right)$$

$$= w_t l_t + (1 + r_{t-1}) b_{t-1} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{t-1}^j d_t^j$$

dividendos en vez de π_t

CPO: $$\frac{\sigma C_t'}{H_t - l_t} = \omega_t$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1+r_t)$$

$$1+r_t = \frac{v_{t+1}^j + d_{t+1}^j}{v_t^j}$$ ← No arbitrage.